Практикалық сабақ №12

Тақырыбы: Грин формуласы. Қисық сызықты интегралдың интералдау жолынан тәуелсіздігі.

Мақсаты: Грин формуласы. Қисық сызықты интеграл көмегімен аудан есептеу. Толық дифференциалы бойынша функцияны табу.

Мысал 1. $y^2 = x; \quad x^2 = y$ параболалармен шенелген L – контуры бойынша $\int\limits_L x^2 y dx + x^3 dy$ қисық сызықты интегралды есептеңіз. Берілген контур оң бағытталған.

Шешуі:

I тәсіл. L тұйық контурын екі доғаның $L_1 = x^2$ және $L_2 = \sqrt{x}$ қосындысы түрінде келтіреміз. Онда

$$\oint\limits_L x^2 y dx + x^3 dy = \int\limits_{L_1} x^2 y dx + \int\limits_{L_1} x^3 dy + \int\limits_{L_2} x^2 y dx + \int\limits_{L_2} x^3 dy = \int\limits_0^1 x^4 dx + \int\limits_0^1 x^3 \cdot 2x dx + \int\limits_1^0 x^2 \sqrt{x} dx +$$

$$+ \int\limits_1^0 \frac{x^3}{2\sqrt{x}} dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35};$$

II тәсіл. Грин формуласын қолданып, интегралды есептеу:

$$\oint\limits_L x^2 y dx + x^3 dy = \iint\limits_\Delta \left(3x^2 - x^2\right) dy dx = \iint\limits_\Delta 2x^2 dy dx = \int\limits_0^1 2x^2 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 2(x^{\frac{5}{2}} - x^4) dx =$$

$$= 2\left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{35}.$$

Мысал 2. $\vec{F} = \left(\frac{y}{1 + x^2 y^2} - 1\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{1 + x^2 y^2} - 10\right)\vec{j}$ күш жұмысы тек қана күш салынған нүктенің бастапқы және соңғы орындарынан тәуелді болып, ал жолдың формасынан тәуелді болмайтынын дәлелдеу керек. Күш салынған нүкте $M_1(0,0)$-ден $M_2(1,1)$–ге дейін жылжыған кезде жұмысты есептеу.

Шешуі: $\cup M_1 M_2$ доғасы бойынша нүкте орын ауыстыру кезде $\vec{F}$ күш жұмысы жолдың формасынан тәуелді болмау үшін, жеткілікті шартты тексереміз:

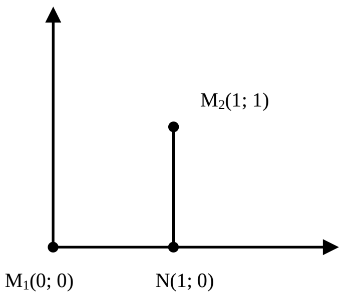
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1 + x^2 y^2} - 1\right) = \frac{1 + x^2 y^2 - 2x^2 y^2}{\left(1 + x^2 y^2\right)^2} = \frac{1 - x^2 y^2}{\left(1 + x^2 y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1 + x^2 y^2} - 10\right) = \frac{1 + x^2 y^2 - 2x^2 y^2}{\left(1 + x^2 y^2\right)^2} = \frac{1 - x^2 y^2}{\left(1 + x^2 y^2\right)^2}, \text{ яғни } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$P(x, y),\ Q(x, y),\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y),\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ функциялары $\cup M_1 M_2$ жатқан кез келген бір байланысты D облысында үзіліссіз болады. Онда жұмысты есептеу үшін II-текті қисық сызықты интегралды табу керек:

$$\mathrm{A} = \int_{\ddot{A}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$A = \int\limits_{\cup M_1M_2} \left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 1 \right)dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - 10 \right)dy.$ Интегралдың интералдау жолынан тәуелсіз болғандықтан оны M_1NM_2 сынық сызығы бойынша есептейміз, мұндағы $N(1,0)$ нүктесі:



Онда

$$A = \int\limits_{M_1N} \left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 1 \right)dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - 10 \right)dy + \int\limits_{NM_2} \left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 1 \right)dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - 10 \right)dy =$$

$$= \int_0^1 (-1)dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{1+y^2} - 10 \right)dy = -x\Big|_0^1 + (arctgy - 10y)\Big|_0^1 = -1 + arctg1 - 10 = \frac{\pi}{4} - 11.$$

M_1N бойынша ІІ-текті қисық сызықты интегралды есептеу кезінде x 0-ден 1-ге дейін өзгереді, $y = 0,\ dy = 0,$ ал NM_2 бойынша интеграл есептеуде $x = 1,\ dx = 0,$ және y 0-ден 1-ге дейін өзгереді.

Аудиториялық жұмысы: Грин формуласы. Қисық сызықты интеграл көмегімен аудан есептеу. Толық дифференциалы бойынша функцияны табу: [8] №№ 4271, 4290, 4298, 4300, 4303, 4304, 4308.

Үй жұмысы

№№ 4273, 4291, 4299, 4301, 4309.